

2 Кіріспе

Математиканың ең қарқынды дамып келе жатқан бағыттарының бірі - сұйық механикасының әр алуан есептерін математикалық талдау. Қазіргі кезде математика, физика, механика, биология және мұнай-газ өнеркәсібі, медицина, су ресурстары және тағы да басқа ғылым мен техниканың салаларының дамуы көптеген ньютондық және ньютондық емес сұйық механикасы процестерін қатаң жан-жақты математикалық зерттеуді және идеялық тұрғыдан дамытуды талап етуде. Себебі аталған салаларда көптеген объектілер осындай қасиеттерге ие.

Зерттеу өзектілігі. Ежелгі заманнан бері сұйықтың ашық және жабық арналардағы қозғалысы, сондай-ақ ыдыстың қабырғасына немесе сұйықпен ағып жатқан қатты денеге күштік әсер етуін зерттеу математикадағы көптеген әрі сан алуан мәселелердің көзі болып табылады. Сұйықтың қозғалыс заңдылығының қарапайым математикалық модельдерін зерттегенде көптеген мәселелер туындайды және олардың басым бөлігі күні бүгінге дейін шешілмей келеді.

Бұл диссертациялық жұмыс күрделі реологиялық қасиеттері ескерілген сығылмайтын біртекті және біртекті емес сұйық ағындарын сипаттайтын сызықты және сызықты емес Кельвин-Фойгт (Навье-Стокс-Фойгт) теңдеулері үшін жаңа қойылымды тура және кері есептердің әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы мәселелерін зерттеуге арналған. Барлық мүмкін болатын қасиеттері ескерілген ньютондық және ньютондық емес сұйықтар ағынын сипаттайтын сызықты және сызықты емес Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері және тура есептерді зерттеу теориялық тұрғыдан да, практикалық тұрғыдан да маңызды әрі өзекті болып табылады.

Сұйық механикасы туралы ең алғашқы ғылыми трактаттар біздің заманымызға дейінгі 250 жылдары ежелгі Грекияда пайда болды. Архимед (287-212 б.з.д.) өзінің екі бөлімнен тұратын "Жүзетін денелер туралы" атты шығармасында сұйықта жүзетін дененің тепе-теңдігі сұрақтарын қарастырған еді. Сұйық қозғалысы туралы "гидродинамика" ғылымының пайда болуы, сұйық пен газ ағынының қозғалысын өзіндік тәжірибелер арқылы зерттеген Л. Да Винчи (1452-1519), С. Стеван (1548-1620), Г. Галилей (1564-1642), Б. Паскаль (1588-1651), Э. Торричелли (1608-1647), И. Ньютон (1643-1727) және тағы басқа да ғалымдардың есімімен тікелей байланысты. Мәселен, 1643 жылы Э. Торричелли саңылаудан ағып жатқан сұйықтың жылдамдығы саңылау үстіндегі биіктікке тура пропорционалдығы туралы формуласын қорықтан еді. Ал, 1653 жылы Б. Паскаль тек сұйық пен газдардың қозғалысы барысында қысымның тұрақты болуы туралы заңды тұжырымдады. И. Ньютон жанама кернеу мен жылдамдық градиентінің сызықты тәуелдігі жөнінде заңын ашты. Алайда, сұйық механикасының ғылыми негізін XVIII ғасырдың

ғалымдары Д. Бернулли (1700-1783), Л. Эйлер (1707-1783), Ж.Л. Даламбер (1717-1783) қалаған еді. Д. Бернуллидің көпжылдық ғылыми ізденістерінің нәтижесінде 1738 жылы жарық көрген "Гидродинамика" атты монографиясында энергияның сақталу заңының салдары ретінде сығылмайтын сұйықтың стационарлық ағысының теңдеуін жария етті. Ал Л. Эйлер 1757 жылы Д. Бернуллидің нәтижесін сығылатын сұйық (газдар) үшін қорытындылап, сонымен қатар, идеал сұйықтың қозғалыс теңдеуін тұжырымдаған еді. Одан кейін оның жұмысын Ж.Л. Лагранж (1736-1813) жалғастырды. Ж.Л. Даламбер сұйықтың тепе-теңдігі мен қозғалысы туралы өзінің трактаттарын жазды. А. Навье (1785-1836) молекулалардың өзара әсерлесуі гипотезасының көмегімен тұтқыр сұйықтың қолғалысының теңдеуін тұжырымдады. Д. Стокс (1819-1903) аксиоматикалық негізде тұтқыр сұйықтың қозғалыс теңдеуін қорытып шығарды. О. Рейнольдс (1842-1912) тұтқыр сұйықтың қозғалысын зерттей отырып, оның ламинарлы және турбулентті ағысы түсінігін енгізді, сонымен қатар, ламинарлы ағыс түрінен турбулентті ағыс түріне және керісінше қалай жылдам өтуге болатынын көрсетті. Л. Больцман (1844-1906) газ немесе сұйық бөлшектерінің статистикалық үлестірімін сипаттайтын заңы арқылы гидродинамика теңдеулерінің кинетикалық негіздемесін жасады.

Жоғарыда есімдері аталған және басқа да ғалымдар бүгінгі таңдағы негізгі математикалық модельдерді құрып әрі шын мәнінде классикалық гидродинамиканың түпнегізін жасаған еді. Сондай-ақ, сұйықтың физикалық ерекшелігін сипаттау үшін кеңістіктік пен уақыттық айнымалыларға тәуелді сұйықтың жылдамдығы мен қысымы қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеулер жүйесін алды.

Шенелген $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ облыста біртекті емес сығылмайтын сұйықтың $[0, T]$, $T > 0$ уақыт аралығында қозғалысы келесі Коши теңдеулер жүйесімен сипатталады:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \text{grad } p = \mathbf{div} \sigma + \rho \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.1)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.2)$$

$$\rho_t + \mathbf{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (2.3)$$

мұндағы $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), \dots, u_d(\mathbf{x}, t))$ — сұйықтың жылдамдық векторы, $p(\mathbf{x}, t)$ — сұйықтың қысымы, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = (f_1(\mathbf{x}, t), \dots, f_d(\mathbf{x}, t))$ — сұйыққа әсер етуші сыртқы күштердің тығыздығы, $\rho(\mathbf{x}, t)$ — сұйықтың тығыздығы, σ — кернеу тензорының девиаторы және $\text{tr } \sigma = 0$. Ал, $\mathbf{div} \sigma$ векторы - ∇ (набл) векторы мен кернеу тензорының девиаторы арасындағы скаляр көбейтінді, оның компоненттері

$$\left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{dj}}{\partial x_j} \right).$$

Кернеу тензорының девиаторын (2.1)-(2.3) теңдеулер жүйесінің белгісіздері арқылы өрнектеу үшін кернеу тензорының девиаторы мен деформация тензоры және олардың уақыт бойынша туындылары арасындағы қатынас қолданылады. Деформация тензорын ε арқылы белгілейді, ал оның компоненттері келесі өрнекпен анықталады

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^d, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Мұндай кернеу тензорының девиаторы мен деформация тензоры және олардың уақыт бойынша туындылары арасындағы қатынас *реологиялық* қатынас деп аталады.

Егер кернеу тензорының девиаторы $\sigma \equiv 0$ болса, онда идеал сығылмайтын сұйықтың қозғалысын сипаттайтын Эйлер теңдеулер жүйесі тұжырымдалады

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \text{grad } p = \rho \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.4)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.5)$$

$$\rho_t + \mathbf{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (2.6)$$

Алайда, соңғы бір жарым ғасырдан астам уақытта гидродинамика саласында негізінен ньютондық сұйықтың қозғалысы зерттелініп келеді. Ньютондық сұйықтың қозғалысының реологиялық қатынасы

$$\sigma = 2\nu\varepsilon \quad (2.7)$$

өрнегімен анықталады, мұндағы ν – тұтқырлықтың кинематикалық коэффициенті. Кернеу тензорының девиаторы (2.7) өрнек бойынша мәнін (2.1)-(2.3) теңдеулер жүйесіне қойғанда

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \text{grad } p = \nu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.8)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.9)$$

$$\rho_t + \mathbf{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (2.10)$$

Навье-Стокс теңдеулер жүйесі қорытылады. Бірақ, 1971 жылы Павловский жұмысында [1] әлсіз концентрлі су-полимерлі қоспаларының моделі үшін кернеу тензорының девиаторын (2.7) өрнектің орнына келесі түрде анықтады

$$\sigma = 2\nu\varepsilon + 2\kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad \nu > 0, \quad \kappa > 0, \quad (2.11)$$

мұндағы $\varkappa$ —ретардация уақыты немесе деформацияның релаксация уақыты. Кернеу тензорының девиаторы (2.11) өрнек бойынша мәнін (2.1)-(2.3) теңдеулер жүйесіне қойғанда

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \text{grad } p = \nu \Delta \mathbf{u} + \varkappa \Delta \mathbf{u}_t + \rho \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.12)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.13)$$

$$\rho_t + \mathbf{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (2.14)$$

тұтқыр сығылмайтын біртекті емес сұйықтың релаксациялық қасиеттерін сипаттайтын Кельвин-Фойгт (Навье-Стокс-Фойгт) теңдеулер жүйесі тұжырымдалады. Ең алғаш мұндай теңдеулер жүйесі туралы туралы 1966 жылы Мәскеуде өткен математиктердің халықаралық конгрессінде О.А. Ладыженская баяндамасында [2] айтылып, Навье-Стокс жүйесінің регуляризациясы ретінде ұсынылды.

Сөйтіп, Кельвин-Фойгт сұйығының математикалық моделін негізге ала отырып, релаксация уақыты дискретті үлестірілген және кешігу уақытынан тұратын *сызықты тұтқыр серпімді сұйықтың* феноменологиялық теориясы қалыптасты. Осындай қасиеттерге ие L —ретті Кельвин-Фойгт сұйықтығының реологиялық қатынасы келесі өрнекпен анықталады

$$\left(1 + \sum_{k=1}^L \lambda_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \sigma = 2 \left(\nu + \sum_{k=1}^{L+1} \varkappa_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \varepsilon, \quad \lambda_L, \mu_{L+1} > 0, \quad L = 1, 2, \dots, \quad (2.15)$$

мұндағы λ_k —релаксация уақыты, $\varkappa_k$ —кешігу уақыты.

Енді соңғы өрнектен σ кернеу тензорының девиаторын өрнектеу үшін оған және ε деформация тензорына, сондай-ақ, олардың уақыт бойынша туындыларына бастапқы шарттар қажет. Ол бастапқы шарттар келесі өрнекпен анықталады

$$\left. \frac{\partial^k \varepsilon}{\partial t^k} \right|_{t=0} = g_k(x), \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, L; \quad (2.16)$$

$$\left. \frac{\partial^k \sigma}{\partial t^k} \right|_{t=0} = h_k(x), \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, L-1. \quad (2.17)$$

Егер $L = 1$ жағдайда (2.15) өрнекке t айнымалысы бойынша Лаплас түрлендіруін қолданып және (2.16), (2.17) бастапқы шарттарда $g_k = 0, h_k = 0$ деп ұйғарсақ, онда кернеу тензорының девиаторы

$$\sigma = 2\varkappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + 2\nu \varepsilon + 2\beta \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \varepsilon d\tau, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (2.18)$$

өрнегімен тұжырымдалады. Егер (2.18) өрнекте $\beta = 1, \alpha = 1$ және e^{-t} функциясының орнына жалпы түрде $K(t)$ функциясын қарастырып, шыққан нәтижені (2.1)-(2.3) Коши теңдеулер жүйесіне қойғанда, сәйкесінше, келесі теңдеулер жүйесі алынады

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \text{grad } p = \nu \Delta \mathbf{u} + \kappa \Delta \mathbf{u}_t + \int_0^t K(t-\tau) \Delta \mathbf{u} d\tau + \rho \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.19)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.20)$$

$$\rho_t + \mathbf{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (2.21)$$

Бұл (2.19)-(2.21) теңдеулер жүйесі жоғарыда атап өткендей біртекті емес ньютондық емес сұйықтың ағынын сипаттайды. Егер қарастырылып отырған сұйық біртекті, яғни тұрақты тығыздықты ($\rho = \text{const}$) болса, онда мұндай сұйықтың қозғалысы $\rho = 1$ дербес жағдайда

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \text{grad } p = \nu \Delta \mathbf{u} + \kappa \Delta \mathbf{u}_t + \int_0^t K(t-\tau) \Delta \mathbf{u} d\tau + \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.22)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.23)$$

теңдеулер жүйесімен тұжырымдалады. Соңғы (2.22)-(2.23) теңдеулер жүйесін интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі деп атайды. Алайда, Звягин мен Турбин [3] атап өткендей, Кельвин де, Фойгт те кернеу тензорының девиаторы мен деформация тензоры арасындағы реологиялық қатынасты немесе тұтқыр серпімді сұйық үшін конститутивтік теңдеулер жүйесін ұсынбаған. "Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі" деген атауды ғылымға енгізген және оны зерттеумен қарқынды түрде айналысқан, О.А. Ладыженская ғылыми мектебінің өкілі әрі шәкірті А.П. Осколков еді. Сонымен қатар, (2.22)-(2.23) теңдеулер жүйесін ең алғаш зерттеп бастаған А.П. Осколков [4] болғандықтан, кейбір ғалымдардың ғылыми еңбектерінде "Осколков теңдеулер жүйесі" деген атау да кездеседі.

Математиканың сұйық механикасы саласындағы есептерді екі түрге бөлуге болады: тура және кері есептер. Тура есептер әдетте сыртқы күштер, физикалық коэффициенттер және басқа да параметрлер сияқты кейбір деректер берілген табиғи немесе өндірістік процестерді модельдеу мәселелері ретінде түсінуге болады. Кері есептер кез келген қолданбалы тура есептер секілді өмірдегі практикалық қолданыстар мен қажеттіліктерден туындайды [5–7].

Мәселен, кері есептер физикалық құбылыстарды модельдеумен қатар, физикалық процестің белгісіз параметрін қалпына келтіру қажеттілігінен туындайды. Олар математикадағы ең маңызды іргелі есептердің бірі болып табылады, өйткені ол тікелей бақылауға қолжетімсіз, есептеу мүмкін емес белгісіз параметрлер туралы мәліметтер береді.

Сондықтан барлық мүмкін болатын қасиеттерді ескере отырып, ньютондық емес сұйық механикасының сызықты және сызықты емес теңдеулері үшін тура және кері есептерді зерттеу маңызды болып табылады. Соңғы бір жарым ғасырда математиктердің сұйық механикасы саласындағы негізгі зерттеу нысаны біртекті және біртекті емес ньютондық сұйықтардың қозғалысын сипаттайтын Навье-Стокс теңдеулері үшін тура есептер болды және олар бойынша көптеген жұмыстар бар. Математикалық тұрғыдан алғанда, бұл тақырыптар бойынша негізгі жұмыстар, Ж. Леренің [8], О.А. Ладыженская [9], Т. Като [10], Р. Темам [11], Ж. Лионс [12], Седов [13], В. да Вейга және Валли [14, 15], Антонцев, Кажихов және Монахов [16], Симон [17], Х. Чой, Х. Ким [18], М. Өтелбаевтың [19, 20], Ш. Смағұловтың, Н. Данаевтың, Н. Темірбековтың [21–23] және т.б. авторлардың еңбектерін атауға болады. Дегенмен, 3D стационарлы емес және сызықты емес Навье-Стокс жүйесінің уақыт бойынша бірімәнді глобалді шешімділігі мәселесі әлі де ашық күйінде қалып отыр [24]. Сондықтан оны Клей математика институты математиканың алтыншы мыңжылдық есебі деп жариялады. Алайда, осы күнге дейін Навье-Стокс және басқа да сұйық механикасы теңдеулері үшін кері есептер жеткілікті түрде зерттелінбеген. Мысалға, ньютондық сұйық механикасының кері есептері бойынша бірнеше мақалаларды атауға болады, мәселен, Прилепко [5], Васин [25], У.У. Әбілқайыров пен С.Е. Айтжанов [26, 27], Дженалиев [28, 29], Фурсиков [30], Чебаторев [31], Накамура [32], Ямамото [33] және ондағы сілтемелердегі жұмыстар. Әйтсе де, соңғы жылдары классикалық сұйық механикасының моделдерімен сипатталмайтын ньютондық емес сұйықтың қозғалысын [3, 34–37] зерттеу математика мен физикада кең тарады. Осындай сұйыққа әртүрлі полимерлік ерітінділер, қоспалар, суспензиялар, қан, битум, жер қыртысы, әлсіз концентрлі сулы полимерлі ерітінділер, кремдер, майлар және басқа да осы сияқты сұйық мысал бола алады. Мұндай ньютондық емес сұйықтың негізгі үлгілерінің бірі – серпімді қасиеттері ескерілген тұтқыр және сығылмайтын ньютондық емес сұйық, олардың біртекті емес қозғалысы (2.22)-(2.23) Навье-Стокс-Фойгт жүйесімен сипатталады [3, 38, 39].

Бұл біртекті емес сұйықтың модельдері тіпті тура есептер үшін де математикалық тұрғыдан жеткілікті түрде зерттелмегенін байқауға болады, өйткені олар классикалық сұйық механикасы шығаратын есептерден де күрделі. Мысалға, біртекті сұйыққа арналған еңбектер ретінде, О.Ладыженскаяның,

А.П.Осколковтың, Жиков пен Пастухованың, С.Н. Антонцев, Х.В. де Оливейра, Х. Хомпыш, В.Г. Литвинов, В.Г. Звягин, М. Турбин, В.К. Қалантаров, К.Р. Ражогопал, Н.А. Каразеева, Е.В. Юшков, Е. Тити және басқаларының (мысалы, [3,38,40–50] және ондағы сілтемелер) жұмысын атауға болады. Біздің білуімізше, ньютондық емес сұйық механикасы есептеріне кері есептерді зерттеу жоқтың қасы. Мәселен, жады мүшесі жоқ (серпімділік қасиеті ескерілмеген) және тығыздығы тұрақты ($\rho = const$) жағдайлар үшін кері есептерді соңғы жылдары Әбілқайыровтың [51], Кумар [52], Федоров [53,54], Антонцев пен Х. Хомпыштың [55–58] жұмыстарынан және т.б. еңбектерден көруге болады.

Зерттеу мақсаты. Диссертациялық жұмыстың мақсаты біртекті және біртекті емес сұйықтың ағынын сипаттайтын сызықты және сызықты емес Кельвин – Фойгт теңдеулер жүйесі үшін қойылған тура және кері есептердің әлсіз және әлді шешімдерінің глобалды немесе локалды бар болуы мен жалғыздығын теориялық тұрғыдан зерттеу.

Зерттеу нысаны. Біртекті және біртекті емес сұйықтың ағындарын сипаттайтын сызықты емес Кельвин-Фойгт теңдеулері үшін кері және тура есептер мен р-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшін кері есептер.

Зерттеу әдістері. Диссертациялық жұмыста келесі заманауи әдістердің тиімді комбинациялары қолданылды:

- Заманауи функционалдық әдістер: априорлық бағалаулар әдісі, компактылық әдісі, Соболев кеңістіктері теориясы, үзіліссіз және компакттілі енгізу теоремалары, интерполяциялық теңсіздіктер;
- Фаэдо – Галеркин әдісі;
- монотондылық әдіс; - функционалдық анализдің энергетикалық функция әдісі;
- тура және кері есептер жалпы теориясы;
- дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің жалпы теориясы.

Теориялық және практикалық құндылығы. Кері және тура есептер табиғатта, өндірісте немесе түрлі тәжірибелік сынамадарда зерттелетін құбылыстың, үрдістің қажетті сипаттамалары тікелей бақылауға қол жетімсіз немесе ғылыми зерттеулердің жобалық-құрастырмалық әзірлемелері қымбат болған жағдайда қолданылады. Сондықтан сызықтық және сызықтық емес теңдеулер үшін тура және кері есептерді шешудің тиімді әдістерін жасау, әсіресе, тұтқыр серпімді ньютондық және ньютондық емес сұйықтың қозғалыс параметрін қалпына келтіруде, инженерлік эксперименталды зерттеулерді едәуір жеңілдетуде және алынған нәтижелердің дәлдігін арттыруда маңызды рөл атқарады.

Ғылыми жаңалығы. Қорғауға ұсынылған негізгі нәтижелер. Диссертациялық жұмыста бұрын зерттелінбеген қойылымдағы есептер қарасты-

рылып, жаңа нәтижелер алынды және қорғауға ұсынылды:

- Сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есебінің әлсіз және әлді шешімдерінің уақыт бойынша локалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есебінің әлсіз және әлді шешімдерінің уақыт бойынша глобалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Оң жағы арнайы сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есебінің әлсіз және әлді шешімдерінің уақыт бойынша локалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Глобалды шешілімді болатын интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есебінің әлсіз және әлді шешімінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Арнайы интегралдық қосымша шартпен берілген сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есебінің әлсіз және әлді шешімдерінің уақыт бойынша локалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Сызықты емес жылу көзімен берілген p -Лапласианды псевдопарабола-лық теңдеу үшін кері есебінің әлсіз шешімінің уақыт бойынша локалды және глобалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Абсорбция мүшемен берілген сызықты p -Лапласианды псевдопарабола-лық теңдеу үшін кері есебінің әлсіз шешімінің уақыт бойынша локалды және глобалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Біртекті емес сұйықтықтар үшін бастапқы тығыздығы кейбір ішкі облыстарда вакуумге айналатын Кельвин-Фойгт жүйесі үшін бастапқы-шеттік есебінің әлді шешімінің бар болуы мен жалғыздығы, регулярлығы дәлелденді.

Аппробация. Диссертациялық жұмыстың нәтижелері

"Problems of modern mathematics and its Applications" конференциясында (Бішкек, Қырғызстан, 16-19 маусым, 2021), "Traditional international April scientific conference in honor of the Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan" конференциясында (Алматы, Қазақстан, 5-7 сәуір, 2022 және 2023 жыл), "Functional Analysis in Interdisciplinary Applications" конференциясында (Анталия, Түркия, 2-7 қазан, 2023 жыл), әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті механика-математика факультеті математика кафедрасының ғылыми семинарында баяндама жасалынды және талқылаудан өтті.

Ғылыми ережелердің, қорытындылар мен нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі белгілі ғалымдардың бұрын алынған нәтижелері негізінде жүргізілген зерттеу жұмысында келтірілген егжей-тегжейлі дәлел-

демелер арқылы, индекстелетін халықаралық журналдардағы жарияланымдармен, сондай-ақ ғылыми қызметтің негізгі нәтижелерін жариялау үшін Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Білім және ғылым саласындағы бақылау комитеті ұсынған жарияланымдармен расталады, сонымен бірге конференция материалдарында расталады.

Жарияланымдар. Диссертациялық зерттеу жұмысының нәтижелері бойынша 13 жұмыс жарияланды, оның ішінде:

- Clarivate Analytics Journal Citation Reports бойынша сәйкес бірінші, екінші және үшінші квартильдерге (Q1, Q2 және Q3) енгізілген және/немесе Scopus дерекқорында CiteScore процентиі 99, 68, 57 және 56 болатын ғылыми журналдардағы 4 мақала;

–Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Білім және ғылым саласында сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған журналдарда 3 мақала;

– халықаралық конференциялар жинағында 6 жарияланым.

Диссертацияның құрылымы. Диссертациялық жұмыс нормативтік сілтемелерден, кіріспеден, көмекші нәтижелерден, негізгі төрт бөлімнен (әр бөлім бөлімшелерден), қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Диссертацияның көлемі 135 бет.

Диссертацияның мазмұны. Ұсынылып отырған диссертациялық жұмыстағы кіріспеден зерттеу тақырыбының өзектілігі мен ғылыми жаңалығы, теориялық және практикалық құндылығы, зерттеу әдістері келтірілген, сондай-ақ, диссертациялық жұмыстың қысқаша мазмұны берілген.

Көмекші нәтижелер бөлімінде диссертациялық жұмыста алынған нәтижелерді тұжырымдау үшін математикалық және функционалдық анализ курсынан, сұйық механикасы теориясынан белгілі функционалдық кеңістіктер мен белгілеулер енгізіледі, сонымен қатар қажетті анықтамалар, леммалар, теоремалар, алгебралық және функционалдық теңсіздіктер келтіріледі.

Бірінші бөлімде сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі үшін кері есеп қарастырылады, оның әлді және әлсіз шешімінің уақыт бойынша локалды бар болуы және жалғыздығы дәлелденеді, дәлелдеу барысында кері есептің шешімділігінің қажетті немесе жеткілікті шарттары алынады. Сондай-ақ, арнайы жағдайларда әлді және әлсіз шешімінің уақыт бойынша глобалды бар болуы және жалғыздығы зерттелінеді.

Екінші бөлімде арнайы қосымша шартпен берілген сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі үшін кері есеп қарастырылады, оның әлді және әлсіз шешімінің уақыт бойынша локалды бар болуы және жалғыздығы дәлелденеді, дәлелдеу барысында кері есептің шешімділігінің қажетті немесе жеткілікті шарттары алынады. Сондай-ақ, сызықты тең-

деу мен оң жағы арнайы түрде болғанда әлді және әлсіз шешімінің уақыт бойынша глобалды бар болуы және жалғыздығы зерттелінеді.

Үшінші бөлімде p -Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшін кері есеп қарастырылады және әлсіз шешімінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденеді, сонымен бірге дәлелдеу барысында кері есептің берілгендері қандай шарттарды қанағаттандырады және қандай функционалдық кеңістікте жатады деген секілді сұрақтарға жауап беріледі.

Төртінші бөлімде біртекті емес сұйықтың қозғалысын сипаттайтын Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-шеттік есеп қарастырылады және әлді шешімінің бар болуы және жалғыздығы, регулярлығы дәлелденеді.

Қорытынды бөлімде алынған нәтижелерге жалпылама шолу және сараптамалық талдаулар жасалынады.

Автор отандық ғылыми кеңесшісі – физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент Х. Хомпышқа және шетелдік ғылыми кеңесшісі - PhD, профессор Х.В. де Оливейраға диссертациялық жұмысты орындауда құнды кеңестері мен жан-жақты көмегі үшін шынайы алғысын білдіреді.

3 Көмекші нәтижелер

Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелерді тұжырымдау үшін келесі функционалдық кеңістіктер қолданылады.

Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ шенелген облыс болсын. Ең алдымен $L^p(\Omega)$ Лебег кеңістігі деп p дәрежесімен интегралданатын өлшемді функциялар кеңістігін атайды, яғни $u(x) \in L^p(\Omega)$ функциясы

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty$$

шартын қанағаттандырады, мұндағы $p \geq 1$. Сонымен қатар, $L^p(\Omega)$ Лебег кеңістігі төменде енгізілген

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ немесе } \|u\|_{p,\Omega} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

норма бойынша Банах кеңістігін құрайды.

Сондай-ақ, $H(\Omega)$ Гильберт кеңістігі деп скаляр көбейтінді анықтауға болатын ақырсыз өлшемді Евклид кеңістігін атайды. Гильберт кеңістігінің қарапайым мысалы ретінде $p = 2$ жағдайда $L^2(\Omega)$ Лебег кеңістігін айтуға болады. Бұл $L^2(\Omega)$ кеңістігінде норма және скаляр көбейтінді, сәйкесінше,

$$\forall f \in L^2(\Omega), \|f\|_{2,\Omega} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall u, v \in L^2(\Omega), (u, v)_{2,\Omega} := \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

өрнектерімен анықталады.

Ал $W^{k,p}(\Omega)$ Соболев кеңістігі деп k —ретті жалпылама туындысымен бірге $L^p(\Omega)$ кеңістігіне тиісті өлшемді функциялар кеңістігін атайды және ол төменде енгізілген норма бойынша

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |D^{\alpha}u|, & p = \infty \end{cases}$$

Банах кеңістігін құрайды, мұндағы $k \geq 1$ кез келген бүтін сан, α — мультииндекс, D^{α} — мультииндекс бойынша жалпылама туынды. Егер $p = 2$ болса, онда $W^{k,2}(\Omega)$ кеңістігі Гильберт кеңістігін құрайды және оны $H^k(\Omega)$ арқылы

да белгілейді. Бұл кеңістікте скалярлық көбейтінді келесі өрнекпен анықталады:

$$\forall u, v \in H^k(\Omega), \quad (u, v) := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

Енді $C_0^\infty(\Omega)$ арқылы шексіз ретті үзіліссіз дифференциалданатын әрі финитті функциялар кеңістігін белгілейік. Егер $C_0^\infty(\Omega)$ кеңістігін $W^{k,p}(\Omega)$ кеңістігінің нормасымен толықтыру жасасақ, онда $W_0^{k,p}(\Omega)$ Банах кеңістігі алынады. Бұл кеңістікке түйіндес Банах кеңістігін

$$W^{-k,p'}(\Omega) := \left(W_0^{k,p}(\Omega)\right)^*, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, p > 1$$

арқылы белгілейді.

$L^p(0, T; B)$ арқылы Бохнер бойынша интегралданатын, яғни $u(x) \in L^p(0, T; B)$ функциясы үшін

$$\int_0^T \|u\|_B^p dt < \infty$$

шарттын қанағаттандыратын өлшемді функциялар кеңістігін белгілейді, мұндағы $1 \leq p$ және B Банах кеңістігі. Сонымен қатар, $L^p(0, T; B)$ кеңістігі төменде енгізілген норма бойынша Банах кеңістігін құрайды

$$\|u\|_{L^p(0,T;B)} := \left(\int_0^T \|u\|_B^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Енді диссертациялық жұмыста қолданылатын функционалдық тізбектердің әлсіз, жұлдызша әлсіз және әлді жинақтылықтардың анықтамаларына тоқталайық.

Анықтама 3.1. *(Әлді жинақтылық) Егер $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset L^p(\Omega)$ тізбегі мен $u \in L^p(\Omega)$ элементі келесі*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u_n - u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

шектік теңдікті қанағаттандырса, онда u_n тізбегі u элементіне әлді жинақты деп атайды.

Анықтама 3.2. *(Әлсіз жинақтылық) Егер $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset L^p(\Omega)$ тізбегі мен $u \in L^p(\Omega)$ элементі келесі*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f, u_n \rangle_{L^p(\Omega)} = \langle f, u \rangle_{L^p(\Omega)}, \quad \text{кез келген } f \in (L^p(\Omega))^*$$

шектік теңдікті қанағаттандырса, онда u_n тізбегі u элементіне әлсіз жинақты деп атайды, мұндағы $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^p(\Omega)} - L^p(\Omega)$ және $(L^p(\Omega))^*$ Банах кеңістіктері арасындағы екіжақтылық жақшасы.

Ескерту 3.1. Сонымен бірге, u_n тізбегінің u элементіне $L^p(\Omega)$ кеңістігінде әлсіз жинақтылығын келесі түрде ықшамдап қайта жазуға болады

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{әлсіз жинақты} \quad L^p(\Omega) - \text{де}, n \rightarrow +\infty.$$

Анықтама 3.3. ($*$ -әлсіз жинақтылық) Егер $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^\infty(\Omega)$ тізбегі мен $f \in L^\infty(\Omega)$ элементі келесі

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, u \rangle_{L^\infty(\Omega)} = \langle f, u \rangle_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{кез келген} \quad u \in L^1(\Omega)$$

шектік теңдікті қанағаттандырса, онда f_n тізбегі f элементіне $*$ -әлсіз (жұлдызша әлсіз) жинақты деп атайды, мұндағы $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^\infty(\Omega)} - L^\infty(\Omega)$ және $L^1(\Omega)$ Банах кеңістіктері арасындағы екіжақтылық жақшасы.

Ескерту 3.2. Сонымен қатар, f_n тізбегінің f элементіне $L^\infty(\Omega)$ кеңістігінде $*$ -әлсіз жинақтылығын келесі түрде ықшамдап қайта жазуға болады

$$f_n \xrightarrow{*} f \quad \text{\textit{*}-әлсіз жинақты} \quad L^\infty(\Omega) - \text{де}, n \rightarrow +\infty.$$

Теорема 3.1. Айталық, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ тізбегі $L^p(\Omega)$ рефлексивті Банах кеңістігінің нормасымен бірқалыпты шенелген болсын. Онда u_n тізбегінен $L^p(\Omega)$ кеңістігінде u элементіне әлсіз жинақталатын u_{n_k} іштізбегін бөліп алуға болады, яғни

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{әлсіз жинақты} \quad L^p(\Omega) - \text{де}, n \rightarrow +\infty.$$

Теорема 3.2. Айталық, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ тізбегі $L^\infty(\Omega)$ сеперабель Банах кеңістігінің нормасымен бірқалыпты шенелген болсын. Онда f_n тізбегінен $L^\infty(\Omega)$ кеңістігінде f элементіне $*$ -әлсіз жинақталатын f_{n_k} іштізбегін бөліп алуға болады, яғни

$$f_{n_k} \xrightarrow{*} f \quad \text{\textit{*}-әлсіз жинақты} \quad L^\infty(\Omega) - \text{де}, n \rightarrow +\infty.$$

Сондай-ақ, диссертациялық жұмыстағы қорытынды нәтижелерді дәлелдеуде төмендегі алгебралық және функционалдық теңсіздіктер қолданылады.

Юнг теңсіздігі. Кез келген $a > 0, b > 0$ және $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ көрсеткіштері үшін

$$ab \leq \varepsilon a^p + \frac{(\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}}}{q} b^q$$

теңсіздігі орынды, мұндағы ε кез келген оң еркін тұрақты.

Гельдер теңсіздігі. Келесі $1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty$, $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$ дәрежелері және $u_k(x) \in L^{p_k}(\Omega)$, $k = 1, \dots, m$ функциялары үшін төмендегі теңсіздік орынды

$$\int_{\Omega} \left| \prod_{k=1}^m u_k(x) \right| dx \leq \prod_{k=1}^m \|u_k(x)\|_{p_k, \Omega}.$$

Минковский теңсіздігі. Кез келген $f(x), g(x) \in L^p(\Omega)$ функциялары үшін

$$\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

теңсіздігі орынды, мұндағы $1 \leq p \leq \infty$.

Интерполяциялық теңсіздік. Айталық, $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ және

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}, \theta \in (0, 1)$$

болсын. Сонымен қатар, $u(x) \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$ болсын. Онда $u(x) \in L^r(\Omega)$ функциясы үшін келесі теңсіздік орынды

$$\|u\|_{r, \Omega} \leq \|u\|_{s, \Omega}^{\theta} \|u\|_{t, \Omega}^{1-\theta}.$$

Интегралдық Гронуолл теңсіздігі Айталық, $y(x)$ және $f(x)$ функциялары теріс емес, $[a, b]$ аралығында үзіліссіз функциялар болсын. Сондай-ақ,

$$y(x) \leq C_1 \int_0^x y(\tau) f(\tau) d\tau + C, \quad a \leq x \leq b$$

теңсіздігін қанағаттандырсын, мұндағы C оң тұрақты. Онда $y(x)$ функциясы үшін төмендегі бағалау орынды

$$y(x) \leq C e^{\int_0^x f(\tau) d\tau}.$$

Лемма 3.1 (Сызықты емес Гронуолл теңсіздігі.). Айталық, $y(x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, +\infty)$ үзіліссіз функциясы келесі бағалауы орынды

$$y(x) \leq C_1 \int_0^x y^{\mu}(s) ds + C_2, \quad x \in \mathbb{R}^+, \mu > 1$$

теңсіздігін қанағаттандырсын, мұндағы C_1 және C_2 оң тұрақтылар. Онда $y(x)$ функциясы үшін

$$y(x) \leq C_2 \left(1 - (\mu - 1) C_1 C_2^{\mu-1} x \right)^{-\frac{1}{\mu-1}}, \quad 0 \leq x < x_{\max} := \frac{1}{C_1 C_2^{\mu-1}}.$$

Лемма 3.2. Барлық $p \in (1, \infty)$ және $\delta \geq 0$ мәндерінде p және d тәуелді C_1 және C_2 тұрақтылары табылып, сонымен қатар барлық $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d, d \geq 1$ үшін

$$||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta| \leq C_1 |\xi - \eta|^{1-\delta} (|\xi| + |\eta|)^{p-2-\delta} \quad (3.1)$$

және

$$(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta) \cdot (\xi - \eta) \geq C_2 |\xi - \eta|^{2+\delta} (|\xi| + |\eta|)^{p-2+\delta}. \quad (3.2)$$

теңсіздіктері орынды.

Ладыженская теңсіздіктері. Кез келген $u(x) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ функциясы үшін келесі теңсіздіктер орынды

$$\|u\|_{4,\Omega}^4 \leq 2 \|u\|_{2,\Omega}^2 \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2, \quad \text{егер } d = 2, \quad (3.3)$$

$$\|u\|_{4,\Omega}^4 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \|u\|_{2,\Omega} \|\nabla u\|_{2,\Omega}^3, \quad \text{егер } d = 3, \quad (3.4)$$

$$\|u\|_{6,\Omega} \leq (48)^{\frac{1}{6}} \|\nabla u\|_{2,\Omega}, \quad \text{егер } d = 3. \quad (3.5)$$

Сұйық механикасынан белгілі келесі функционалдық кеңістіктердің анықтамасын берейік:

$$\mathcal{V} := \{u \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} u = 0\}, \quad (3.6)$$

$$H := L^2(\Omega) \text{ нормасы бойынша } \mathcal{V} \text{ тұйықталуы}, \quad (3.7)$$

$$V_p := W^{1,p}(\Omega) \text{ нормасы бойынша } \mathcal{V} \text{ тұйықталуы}. \quad (3.8)$$

Лемма 3.3. Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ липшиц үзіліссіз шекарасы болсын. Егер $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$ болса, онда келесі теңсіздіктер орынды

$$\|u\|_{r^*,\Omega} \leq C(r, d) \|\nabla u\|_{r,\Omega}, \quad r^* = \frac{dr}{d-r}, \quad 1 \leq r < d, \quad (3.9)$$

$$\|u\|_{q,\Omega} \leq C(r, q, d) \|\nabla u\|_{W^{1,r}(\Omega)}, \quad d \leq q < \infty, \quad r = d, \quad (3.10)$$

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(r, d) \|\nabla u\|_{r,\Omega}, \quad 0 < \alpha \leq 1 - \frac{d}{r}, \quad r > d. \quad (3.11)$$

Сонымен қатар, келесі үзіліссіз енгізулер орынды

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{егер } 1 \leq q \leq r^* \text{ және } 1 \leq r < d,$$

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{егер } d \leq q < \infty \text{ және } r = d,$$

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \text{егер } \alpha = 1 - \frac{r}{d} \text{ және } r > d.$$

Сондай-ақ, төмендегі компактiлi енгізулер орынды

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{егер } 1 \leq q < r^* \text{ және } 1 \leq r < d,$$

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ егер } 1 \leq q < \infty \text{ және } r = d,$$

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \text{ егер } 0 < \alpha \leq 1 - \frac{d}{r} \text{ және } r > d.$$

Алдағы уақытта $\frac{dr}{d-r}$ өрнегін қысқаша r^* арқылы белгіленеді, ал $r = d$ жағдайда $r^* = \infty$ -ға тең, мұндағы $d > r$.

Лемма 3.4. (Обэн-Лионс леммасы) Айталық, X , E және Y Банах кеңістіктері болсын. Бұл Банах кеңістіктері $X \hookrightarrow E \hookrightarrow Y$, сәйкесінше, компактiлi және үзiлiссiз енгiзулердi қанағаттандырса, онда келесi

$$L^r(0, T; X) \cap \{v : v_t \in L^1(0, T; Y)\} \hookrightarrow L^r(0, T; E), \text{ егер } 1 \leq r \leq \infty, \quad (3.12)$$

$$L^\infty(0, T; X) \cap \{v : v_t \in L^q(0, T; Y)\} \hookrightarrow C([0, T]; E), \text{ егер } q \in (1, \infty]. \quad (3.13)$$

компактiлi енгiзулерi орынды.

Сондай-ақ, 3.3-леммада келтірілген Соболев теңсіздіктерімен қоса келесі пайдалы теңсіздіктер қолданылады.

Лемма 3.5. Айталық, Ω облысы $\mathbb{R}^d$ шенелген облыс және $r \geq 1$ болсын. Егер $\partial\Omega$ шекарасы $C^{0,1}$ класының элементі болса, онда $\forall u \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$ функциясы үшін келесі теңсіздіктер орынды

$$\|\nabla u\|_{r^*, \Omega} \leq C(r, d) \|D^2 u\|_{r, \Omega}, \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{C(r, d)} \|\Delta u\|_{r, \Omega} \leq \|D^2 u\|_{r, \Omega} \leq C(r, d) \|\Delta u\|_{r, \Omega}. \quad (3.15)$$

Егер $\partial\Omega$ шекарасы $C^{1,1}$ класының элементі болса, онда $\forall u \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$ функциясы үшін келесі теңсіздіктер орынды

$$\|\nabla u\|_{r^*, \Omega} \leq C(r, d) \|\Delta u\|_{r, \Omega}, \quad (3.16)$$

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(r, d) \|\Delta u\|_{r, \Omega}, \quad 0 < \alpha \leq 1 - \frac{d}{r^*}, \quad 2r > d. \quad (3.17)$$

Мұндағы $|D^m u|$, $m \in \mathbb{N}$ келесі өрнекпен анықталады

$$|D^m u| := \sum_{|\gamma|=m} \left| \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial x_1^{\gamma_1} \cdots \partial x_d^{\gamma_d}} \right|, \quad |\gamma| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_d.$$

дербес жағдайда, $|Du|^2 = |\nabla u|^2$ және $|D^2 u|^2 = |\nabla u_{x_1}|^2 + \cdots + |\nabla u_{x_d}|^2$. Айта кету керек, соңғы лемманың тармақтарында қолданылған $C = C(r, d)$ белгілеулері әр түрлі оң константалар болып есептелінеді.

Диссертациялық жұмыста қарастырылатын тура есепте қысымды қалпына келтіруге маңызды рөлге ие келесі де Рамм леммасын тоқталайық.

Лемма 3.6. Айталық, $1 < q < \infty$ және $\varphi^* \in W^{-1,q'}(\Omega)$ болсын. Егер

$$\langle \varphi^*, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in V_q$$

болса, онда

$$\int_{\Omega} p \, dx = 0 \quad \text{және} \quad \langle \varphi^*, \varphi \rangle = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

шарттарын қанағаттандыратын жалғыз түрде $p \in L^q(\Omega)$ табылады. Сонымен қоса, C оң тұрақтысы үшін келесі бағалау орынды

$$\|p\|_{q,\Omega} \leq C \|\varphi^*\|_{W^{-1,q'}(\Omega)}.$$

Мұнымен қоса, регуляр нәтижелер үшін қажетті Стокс операторының анықтамасын келтірейік.

Келесі

$$\begin{aligned} \mathbb{A} : H^2(\Omega) \cap V &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto -\mu \mathbb{P}(\Delta u) \end{aligned} \quad (3.18)$$

шарттарын қанағаттандыратын $\mathbb{A}$ бейнелеуі Стокс операторы деп аталады, мұндағы $\mathbb{P} : L^2(\Omega) \rightarrow H$ Лере проекциясы. Бұл оператор

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega\text{-де}, \quad (3.19)$$

$$-\mu \Delta u = f - \nabla p, \quad \mathbf{x} \in \Omega\text{-де}, \quad (3.20)$$

$$u = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega\text{-да} \quad (3.21)$$

стационарлық Стокс есебінің u шешімі мен f сыртқы күштер арасындағы сәйкестікті орнатады. Лере проекциясының симметриялығынан келесі өрнек тұжырымдалады

$$\mu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \mathbb{A}(u) \cdot \varphi \, dx \quad \forall u \in W^{2,2}(\Omega) \cap V, \quad \forall \varphi \in V. \quad (3.22)$$

Эллиптикалық операторлар теориясынан белгілі келесі нәтижені келтірейік.

Лемма 3.7. *Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ шекарасы болсын, сонымен қатар $\partial\Omega$ беті C^2 класына тиісті болсын. Егер $f \in L^r(\Omega)$, $r \in (1, \infty)$ болса, онда (3.19)-(3.20) Стокс есебін Ω -да барлық дерлік нүктеде қанағаттандыратын, сонымен қатар $u \in W^{2,r}(\Omega)$ және $p \in W^{1,r}(\Omega)$, $\int_{\Omega} p(x) \, dx = 0$ қасиеттерге ие жалғыз (u, p) шешімі табылады және әрі келесі бағалауды*

$$\|u\|_{W^{2,r}(\Omega)} + \|p\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C \|f\|_{r,\Omega}. \quad (3.23)$$

қанағаттандырады, мұндағы $C = C(\mu, r, \Omega)$ оң тұрақты сан. Сондай-ақ, u функциясы үшін (3.21) шарт орынды.

(3.23) өрнектен келесі бағалауды алуға болады

$$\|D^2u\|_{r,\Omega} + \|\nabla p\|_{r,\Omega} \leq C \|f\|_{r,\Omega}. \quad (3.24)$$

(3.18) Стокс операторы мен f күш өрісі арасындағы сәйкестікті пайдаланып,
(3.24) өрнекте $r = 2$ жағдайында, төмендегі бағалау алынады

$$\|D^2u\|_{2,\Omega} + \|\nabla p\|_{2,\Omega} \leq C \|\mathbb{A}(u)\|_{2,\Omega}. \quad (3.25)$$

4 Интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есептер

Бұл бөлімде интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған кері есептің әлсіз және әлді шешімдерінің уақыт бойынша локалды бар болуы мен жалғыздығы зерттелінеді.

4.1. Сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есеп

4.1.1 Есептің қойылымы

Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ жатық шекарасы болсын. $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$ бүйір бетімен анықталған $Q_T = \Omega \times [0, T], T > 0$ цилиндрінде $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар үштігін анықтауға арналған, сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтықтардың ағынын сипаттайтын

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds - \nabla p = f(t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (4.1)$$

интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесін,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T \quad (4.2)$$

сығылмайтын сұйықтық теңдеуін,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.3)$$

бастапқы шартын,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T \quad (4.4)$$

сырғанау шекаралық шартын және

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \boldsymbol{\omega} d\mathbf{x} = e(t), \quad t \in [0, T] \quad (4.5)$$

қосымша шартты қанағаттандыратын кері есепті қарастырайық, мұндағы $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ — сұйықтың жылдамдығы мен $p(\mathbf{x}, t)$ — сұйықтың қысымы, ал ν және κ оң сандары, сәйкесінше, сұйықтың кинематикалық тұтқырлық және релаксациясының коэффициенттері, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) := f(t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ вектор функциясы сыртқы күштердің тығыздығын, ал $f(t)$ сыртқы күштердің интенсивтілігін сипаттайды. Сондай-ақ, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), K(t)$ белгілі функциялар.

Ғылыми әдебиеттерде (4.1)-(4.2) теңдеулер жүйесін интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт [4] теңдеулер жүйесі кейде Осколков

теңдеулер жүйесі [42] деп те атайды. Физикалық жағынан мұндай теңдеулер жүйесі сығылмайтын тұтқыр ньютондық емес сұйықтың ағынын сипаттайды. (4.1)-(4.2) теңдеулер жүйесінің толыққанды физикалық негіздемесін және математикалық моделін [1, 3, 4, 34, 59] жұмыстардан көруге болады.

Сондай-ақ, (4.1)-(4.2) теңдеулер жүйесінде сыртқы күштердің тығыздығы $\mathbf{F}(x, t) = f(t)\mathbf{g}(x, t)$ шамасы белгілі болғанда тура есеп деп аталады және олар көптеген авторлардың жұмысында қарастырылған [3, 42, 46].

Тек $\mathbf{u}_0$ бастапқы жылдамдық пен $f(t)\mathbf{g}(x, t)$ сыртқы күштердің шамалары белгілі болғанда ғана ізденуге рұқсат етілетін тура есептерді теориялық тұрғыдан зерттеу маңызды болып табылады. Алайда, математикалық моделдің жалпы үдерісі белгілі болып, бірақ физикалық үдеріс жердің астында, жоғары температуралы ортада болып жатқанда, немесе физикалық үдерісте параметрді тікелей өлшеу мүмкін емес болғанда, немесе нақты бір параметрі белгісіз (мысалы, $\mathbf{f}(t)$ сыртқы күштердің интенсивтілігі) болғанда кері есептердің [5] маңызды екенін аңғаруға болады.

Кеңістіктік айнымалыдан тәуелді $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ функциясын қалпына келтіруге арналған оң жағы $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{f}(\mathbf{x})g(\mathbf{x}, t)$ түріндегі сызықты (конвективті мүшесі жоқ) (4.1)-(4.2) теңдеулер жүйесі үшін

$$\int_0^T \mathbf{u}w(t)dt = \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad \int_0^T \nabla p w(t)dt = \mathbf{b}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

қосымша шарттарды қанағаттандыратын кері есеп $K(t) \neq 0$ жағдайда [60] жұмыста, ал $K(t) = 0$ жағдайда [51] жұмыста қарастырылды. Жылдамдық векторымен бірге $K(t)$ өзегін анықтауға арналған (4.1)-(4.2) теңдеулер жүйесі үшін (4.5) қосымша шартпен қойылған кері есеп [52] жұмыста қарастырылған. Осы секілді әртүрлі Кельвин-Фойгт теңдеулері үшін кері есептер [51, 52, 54, 55, 60, 61] жұмыстарда зерттелінді. Егер (4.1)-(4.2) теңдеулер жүйесінде $\kappa = 0$ және $K(t) = 0$ болса, онда классикалық Навье-Стокс жүйесі шығады. Навье-Стокс және оған қатысты гидродинамиканың теңдеулер жүйесі үшін кері есептер [5, 26, 27, 31, 32, 62–64] жұмыстарда қарастырылды.

Анықтама 4.1. (4.1)-(4.5) кері есебінің әлсіз шешімі деп

- 1 $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$, $\mathbf{u}_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$, $f(t) \in L^2[0, T]$;
- 2 Ω —да барлық дерлік жерде $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ бастапқы шартты;
- 3 Кез келген $\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ және барлық $t \in (0, T)$ үшін төмендегі интеграл-

дық теңестікті

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left((\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} + \kappa (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} \right) + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} = \\ & f(t) (\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} - ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} - \\ & \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} ds. \end{aligned} \quad (4.6)$$

қанағаттандыратын $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар жүйесін атайды.

Анықтама 4.2. (4.1)-(4.5) кері есебінің әлді шешімі деп

1 $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega))$, $\mathbf{u}_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega))$, $f(t) \in L^2[0, T]$;

2 әрбір теңдеуді сәйкес облыстарда барлық дерлік жерде қанағаттандыратын

$(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар жүйесін атайды.

Ескерту 4.1. Әдеттегідей, әлсіз шешімінің анықтамасында p қысым туралы мағлұмат келтірілмеген. Оны [65] мақаладағыдай $\mathbf{u}$ және f функциялары белгілі болғаннан кейін 3.6-лемманы қолданып, (4.2) теңдеуден бірімәнді қалпына келтіруге болады.

Кері есепті эквивалентті локалды емес тура есепке келтіру

Айталық, есептердің берілгендері келесі шарттарды қанағаттандырсын дейік.

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}^1(\Omega); \quad (4.7)$$

$$\exists k_0 \in \mathbb{R} : 0 < k_0 < \infty, \quad |g_0(t)| = |(\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}| \geq k_0 > 0, \quad \forall t \geq 0; \quad (4.8)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)); \quad (4.9)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad e(t) \in W_2^1([0, T]); \quad (4.10)$$

$$(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} = e(0); \quad (4.11)$$

$$K(t) \in L^2([0, T]) : \quad \|K(t)\|_{L^2([0, T])} \equiv K_0 < \infty. \quad (4.12)$$

Енді (4.1) теңдеуді $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ функциясына көбейтіп және Ω облыс бойынша интегралдайық. Алынған өрнекті бөліктеп интегралдап, сондай-ақ (4.5) қосымша және (4.8) шартты қолдансақ, онда $f(t)$ функциясы келесі түрде анықталады

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{1}{g_0(t)} \left(e'(t) + \kappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} - \right. \\ & \left. ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right) := F_1(\mathbf{u}, t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Мұнан соң, (4.13) өрнекті (4.1) теңдеуге қойғансақ, онда белгісіз $\mathbf{u}$ және p функцияларын табуға арналған

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(s) ds - \nabla p = \quad (4.14)$$

$$F_1(\mathbf{u}, t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T,$$

теңдеулер жүйесін, (4.3) бастапқы және (4.4) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын локалды емес тура есеп алынады, мұндағы $F_1(\mathbf{u}, t) = f(t)$ функциясы (4.13) өрнекпен анықталады. Демек, (4.1)-(4.5) кері есебін, сәйкесінше, (4.14), (4.3)-(4.4) локалды емес тура есепке алып келдік.

Кері есеп пен локалды емес тура есептің эквиваленттілігі жөнінде келесі лемма орынды.

Лемма 4.1. *Айталық, (4.8)-(4.11) шарттар орындалсын. Демек, (4.1)-(4.5) кері есебі (4.14), (4.3)-(4.4) локалды емес тура есебіне эквивалентті, яғни $(\mathbf{u}, p, f)$ функциялары (4.1)-(4.5) кері есебінің шешімі болса, онда $(\mathbf{u}, p)$ жүйесі (4.14), (4.3)-(4.4) локалды емес тура есебінің шешімі болып табылады және керісінше, $(\mathbf{u}, p)$ функциялары (4.14), (4.3)-(4.4) локалды емес тура есебінің шешімі болса, онда ол (4.13) өрнекпен анықталған $f(t)$ функциясымен бірге (4.1)-(4.5) кері есебінің шешімін береді.*

Ескерту 4.2. (4.14), (4.3)-(4.4) локалды емес тура есебінің әлсіз және әлді шешімінің анықтамасы 4.1 және 4.2-анықтамаға ұқсас түрде беріледі.

Дәлелдеуі 1. Шын мәнінде, лемманың дәлелдеуінің бірінші бөлігі (4.1)-(4.2) теңдеулер жүйесінен (4.14) теңдеуді алуда дәлелденді.

Енді екінші бөлігін дәлелдейік. Айталық, $(\mathbf{u}, p)$ функциялар жүйесі (4.14), (4.3)-(4.4) локалды емес тура есебінің шешімі болсын. Екінші жағынан, $(\mathbf{u}, p)$ функциялар жүйесі (4.13) өрнегімен анықталған $f(t)$ функциясымен бірге (4.1)-(4.4) өрнектерді қанағаттандырады. Олай болса, $(\mathbf{u}, p, f)$ функциялары (4.1)-(4.5) кері есебінің шешімі екенін дәлелдеу үшін (4.5) қосымша шарттың орынды екенін көрсету жеткілікті.

Кері жорып, яғни (4.5) қосымша шарт орындалмасын деп ұйғарайық, яғни

$$(\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} = e_1(t), \quad t \in [0, T] \quad (4.15)$$

болсын, мұндағы $t \geq 0$ үшін $e_1(t) \neq e(t)$. Шешімнің анықтамасы мен (4.10), (4.15) шарттардан $e_1(t) \in W_2^1([0, T])$ орындалады, сонымен қатар (4.11) үйлесімділік шарттарынан төмендегі нәтиже қорытылады

$$e_1(0) = (\mathbf{u}(0), \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} = e(0).$$

Енді (4.14) өрнекке $\boldsymbol{\omega}$ функциясын көбейтіп және бөліктеп интегралдау

өрнегін қолданып, сонымен бірге (4.15) шартты ескерсек, онда

$$e_1'(t) + \varkappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds = \frac{1}{g_0(t)} \left(e'(t) + \varkappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right) (\mathbf{g}, \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} \quad (4.16)$$

теңдігі шығады, сондай-ақ (4.8) шарттан $E(t) = e_1(t) - e(t)$ функциясы үшін келесі Коши есебі алынады

$$\begin{cases} E'(t) = 0, \\ E(0) = e_1(0) - e(0) = 0, \end{cases} \quad (4.17)$$

және одан $t \geq 0$ үшін $e_1(t) \equiv e(t)$ тұжырымдалады.

4.1.2 Кері есептің әлсіз шешімінің бар болуы

Алдағы уақытта 4.1-лемма бойынша (4.1)-(4.5) кері есебінің орнына (4.14), (4.3)-(4.4) локалды емес тура есебінің шешімділігі зерттелінеді.

Теорема 4.1. Айталық, (4.7)-(4.12) шарттар орындалсын және қандай да бір m оң саны табылып келесі шарт орындалсын

$$\frac{\varkappa}{k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq m < 2. \quad (4.18)$$

Онда ақырлы $T_1 \in (0, T]$ уақыты табылып, (4.14), (4.3)-(4.4) локалды емес тура есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір әлсіз шешімі табылады, мұндағы T_1 мәні төменде (4.35) өрнекпен анықталады. Сондай-ақ, әлсіз шешім келесі априорлық бағалауды қанағаттандырады

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0, T_1; \mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}^1(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{H}^1(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}^1(\Omega))}^2 \leq C, \quad (4.19)$$

мұндағы C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

Ескерту 4.3. 4.1-Теоремадағы (4.18) шарт (4.5) қосымша шартқа қатысты бағалаулар алу кезінде пайда болды.

Дәлелдеуі 2. Теореманы дәлелдеу үшін Фаздо-Галеркин әдісі қолданылады: ең алдымен жуық шешімдер құрылып, оған бағалаулар алынады және шекке көшу дәлелденеді.

Галеркиндік жуықтау. Айталық, $\{\boldsymbol{\varphi}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ функциялары $\mathbf{H}$ кеңістігінің элементтерінен құралған, $\mathbf{L}^2(\Omega)$ кеңістігінде ортогональ және сызықтық комбинациялары $\mathbf{H}^1(\Omega)$ кеңістігінде барлық жерде тығыз жүйе болсын. Өлшемі n -ге ($n \in \mathbb{N}$) тең және $\boldsymbol{\varphi}_k$, $k = 1, \dots, n$ жүйесінің сызықтық

комбинациясынан тұратын $\mathbf{X}^n$ кеңістігін қарастырайық. Кез келген $n \in \mathbb{N}$ үшін (4.1)-(4.4), (4.13) есептің жуық шешімі келесі түрде ізделінеді

$$\mathbf{u}^n(x, t) = \sum_{j=1}^n c_j^n(t) \varphi_j(x), \quad \varphi_j \in \mathbf{X}^n, \quad (4.20)$$

мұндағы $c_j^n(t)$, $j = 1, \dots, n$ коэффициенттері белгісіз және төмендегі жай дифференциалдық теңдеулер (ЖДТ) жүйесінің шешімі болып табылады

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left((\mathbf{u}^n(t), \varphi_k)_{2,\Omega} + \varkappa (\nabla \mathbf{u}^n(t), \nabla \varphi_k)_{2,\Omega} \right) + \nu (\nabla \mathbf{u}^n(t), \nabla \varphi_k)_{2,\Omega} - \\ ((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \varphi_k, \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} = - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \varphi_k)_{2,\Omega} ds + \\ F_1(\mathbf{u}^n, t) (\mathbf{g}(t), \varphi_k)_{2,\Omega}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

мұндағы $k = 1, 2, \dots, n$ және

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{u}^n, t) = \frac{1}{g_0} \left(e'(t) + \varkappa (\nabla \mathbf{u}_t^n(t), \nabla \omega)_{2,\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}^n(t), \nabla \omega)_{2,\Omega} - \right. \\ \left. ((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \omega, \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \omega)_{2,\Omega} ds \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Енді (4.21) ЖДТ жүйесін келесі бастапқы шарттармен толықтырайық

$$\mathbf{u}^n(0) = \mathbf{u}_0^n, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.23)$$

мұндағы

$$\mathbf{u}_0^n = \sum_{j=1}^n (\mathbf{u}_0, \varphi_j)_{2,\Omega} \varphi_j$$

функциясы $\mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}^1(\Omega)$ кеңістігіндегі функционалдық тізбек болып табылады және

$$\mathbf{u}_0^n(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \text{ әлді жинақты } \mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}^1(\Omega)\text{-де } n \rightarrow \infty. \quad (4.24)$$

Жай дифференциалдық теңдеулер теориясы бойынша (4.21)-(4.23) Коши есебінің $[0, t_0]$ аралығында $c_j^n(t)$ шешімі локалды бар болады. Төменде, априорлық бағалаулар арқылы Коши есебінің шешімін $[0, T_0] \subset [0, T]$ кеңейтуге болатынын көруге болады, мұндағы $[0, T_0]$ — априорлық бағалаулар орынды болатын максималды аралық.

Априорлық бағалаулар. (4.21) жүйесінің k —теңдеуін $c_k^n(t)$ және $\frac{dc_k^n(t)}{dt}$ көбейтіп, k бойынша 1-ден n -ге шейін қосындыласақ, сәйкесінше, келесі

теңдіктер алынады

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 = \\ & - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} ds + F_1(\mathbf{u}^n, t) (\mathbf{g}, \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 = \\ & ((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_t^n(t), \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega} ds + \\ & F_1(\mathbf{u}^n, t) (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Жоғарыдағы (4.25) және (4.26) теңдіктерді біріктерсек, онда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \\ & \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 = - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} ds - \\ & \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega} ds + F_1(\mathbf{u}^n, t) (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} + \\ & F_1(\mathbf{u}^n, t) (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega} + ((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_t^n(t), \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} := \sum_{i=1}^5 I_i. \end{aligned} \quad (4.27)$$

өрнегі алынады. Соңғы (4.27) өрнектің оң жағына Гельдер және Юнг теңсіздіктерін қолданып келесідей бағалайық

$$|I_1| \leq \frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \frac{K_0^2}{2\nu} \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds; \quad (4.28)$$

$$|I_2| \leq \frac{\varepsilon_1}{4} \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \frac{K_0^2}{\varepsilon_1} \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds; \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq |F_1| \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega} \leq \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}}{k_0} [|e'(t)| + \\
&\kappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \left(\nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \right. \\
&\left. K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \left(\frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2} \right) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \quad (4.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\kappa^2}{2\varepsilon_2 k_0^2} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2}{2\varepsilon_3 k_0^2} \left[|e'(t)|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \times \right. \\
&\left. \left(\nu^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + C^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^4 + K_0^2 \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds \right) \right], \\
|I_4| &\leq \left(\frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2} \right) \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\kappa^2}{2\varepsilon_2 k_0^2} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \\
&\frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2}{2\varepsilon_3 k_0^2} \left[|e'(t)|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \left(C^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^4 + \right. \quad (4.31) \\
&\left. \nu^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + K_0^2 \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds \right) \right],
\end{aligned}$$

$$|I_5| \leq \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{4,\Omega}^2 \leq \frac{\varepsilon_1}{4} \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \frac{C^2(\Omega)}{\varepsilon_1} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^4. \quad (4.32)$$

Осылайша, алынған (4.28)-(4.32) теңсіздіктерді (4.27) өрнектің оң жағына қойғанда келесі дифференциалдық теңсіздік шығады

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \kappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \\
&\alpha \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \beta \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq \\
&C_1 \int_0^t \left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \kappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right) ds + \quad (4.33) \\
&C_2 \left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \kappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right)^2 + \\
&C_3 \left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \kappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right) + C_4(t),
\end{aligned}$$

мұндағы

$$\alpha := 2 \left(1 - \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} \right); \quad \beta := 2 \left(\kappa - \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\kappa^3}{\varepsilon_2 k_0^2} \sup_{t \in [0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right);$$

$$C_1 := \frac{1}{\nu + \varkappa} \left(\frac{K_0^2}{\nu} + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_1} + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right);$$

$$C_2 := \frac{2C^2}{(\nu + \varkappa)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right);$$

$$C_3 := \frac{1}{\nu + \varkappa} \left(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \frac{2\nu^2}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right);$$

$$C_4(t) := \frac{2}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 |e'(t)|^2.$$

Енді $\varepsilon_2 = \frac{2e^\varepsilon - 1}{e^\varepsilon}$; $\varepsilon_3 = \frac{\sin \varepsilon}{e^\varepsilon}$; $\varepsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ таңдасақ және ε_1 -дің сәйкес мәні үшін $\frac{\varkappa}{k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq m < 2$ теңсіздігінің жоғарғы шекарасын m -нен 2-ге дейін кеңейтуге болады. Алайда, ε_1 саны $m > 2$ болатындай таңдалмауы керек, себебі $\alpha > 0$ болғандығынан $\varepsilon_2 < 2$.

Енді (4.33) өрнекті s бойынша 0-ден t -ға шейін интегралдап, (4.24) өрнекті қолдансақ, келесі интегралдық теңсіздікке келеміз

$$z(t) + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))}^2 + \alpha \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(Q_T)}^2 + \beta \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))}^2 \leq C_5 \int_0^t z^2(s) ds + C_6, \quad (4.34)$$

мұндағы

$$z(t) := 1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2, \Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2;$$

$$C_5 = \max \{C_1 T + C_3; C_2\}; \quad C_6 = \|\mathbf{u}_0\|_{2, \Omega}^2 + (\varkappa + \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \int_0^t C_4(s) ds.$$

Әрі қарай $z(t)$ функциясы үшін 3.1-леммадағы сызықтық емес Гронуолл теңсіздігін қолданғанда (4.34) өрнектен

$$0 \leq t \leq T_1 < T_* := \frac{1}{C_5 C_6}. \quad (4.35)$$

уақыт аралығы үшін келесі бағалау орынды

$$z(t) \leq \frac{C_6}{1 - C_5 C_6 t} \equiv K_1 < \infty. \quad (4.36)$$

Демек, кез келген $t \leq T_1 < T_*$ үшін (4.36) өрнектен келесі бағалау орынды екенін көруге болады

$$\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2, \Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq K_1. \quad (4.37)$$

(4.37) бағалауды (4.34) өрнектің оң жағына қолданып және $t \in [0, T_1]$ бойынша супремум алғанда келесі априорлық бағалау тұжырымдалады

$$\sup_{t \in [0, T_1]} \left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2, \Omega}^2 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right) + \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0, T_1; \mathbf{H}^1(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(Q_{T_1})}^2 + \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(0, T_1; \mathbf{H}^1(\Omega))}^2 \leq C := C(\nu, \kappa, \alpha, \beta, T_1, K_1, C_5, C_6). \quad (4.38)$$

Шектік көшу. Жоғарыдағы (4.20) өрнекпен анықталған $\mathbf{u}^n$ жуық шешімі (4.19) априорлық бағалауды қанағаттандырады. Бұдан $\mathbf{u}^n$ тізбегінің $\mathbf{u}^{n_k}$ іштізбегі табылып, ол келесі $*$ -әлсіз және әлсіз жинақтылықтардың орынды екенін көруге болады. Ескерер жәйт, шектік көшуді дәлелдеуде ыңғайлылық үшін $\mathbf{u}^{n_k}$ іштізбегін $\mathbf{u}^n$ арқылы белгілеуі қолданылады.

$$\mathbf{u}^n \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0, T_1; \mathbf{H}^1(\Omega))\text{-де} \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.39)$$

$$\mathbf{u}^n \rightharpoonup \mathbf{u} \quad *-\text{әлсіз жинақты } L^\infty(0, T_1; \mathbf{H}^1(\Omega))\text{-де}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.40)$$

$$\mathbf{u}_t^n \rightharpoonup \mathbf{u}_t \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0, T_1; \mathbf{H}^1(\Omega))\text{-де}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.41)$$

Сонымен қатар, (4.19) априорлық бағалаудан келесі тұжырымдар орынды

$$\mathbf{u}^n \text{ тізбегі } L^2(0, T_1; \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega))\text{-де бірқалыпты шенелген}, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{u}_t^n \text{ тізбегі } \mathbf{L}^2(Q_{T_1})\text{-де бірқалыпты шенелген}. \quad (4.43)$$

Сонымен бірге, $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ компактiлi енгізуі және Обэн-Лионс леммасын бойынша келесі әлді жинақтылық шығады

$$\mathbf{u}^n \longrightarrow \mathbf{u} \quad \text{әлді жинақты } L^2(0, T_1; \mathbf{L}^2(\Omega))\text{-де}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.44)$$

Айталық, $\zeta(t) \in C_0^\infty([0, T_1])$ болсын. (4.21) өрнекті $\zeta(t)$ функцияға көбейтіп, 0 мен T_1 аралығында интегралдасақ, онда төмендегі өрнек орынды

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{T_1}} \mathbf{u}_t^n \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt + \kappa \int_0^{T_1} (\nabla \mathbf{u}_t^n, \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2, \Omega} dt + \int_{Q_{T_1}} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt + \\ & \nu \int_0^{T_1} (\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2, \Omega} dt = \int_0^{T_1} \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2, \Omega} ds dt + \\ & \int_0^{T_1} F_1(\mathbf{u}^n, t) \int_{\Omega} \mathbf{g} \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Сондай-ақ, k -ны бекітіп және (4.39)-(4.44) нәтижелерді қолданып, (4.45)

өрнектен $n \rightarrow \infty$ шекке көшсек, онда төмендегі өрнек тұжырымдалады

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{T_1}} \mathbf{u}_t \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt + \varkappa \int_0^{T_1} (\nabla \mathbf{u}_t, \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} \, dt + \int_{Q_{T_1}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt + \\ & \nu \int_0^{T_1} (\nabla \mathbf{u}, \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} \, dt = \int_0^{T_1} \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} \, ds dt + \\ & \int_0^{T_1} F_1(\mathbf{u}, t) \int_{\Omega} \mathbf{g} \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} \, dt, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Соңғы теңдіктегі конвективті мүше үшін келесі шектік көшуді орынды

$$(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \rightharpoonup (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad \text{әлсіз жинақты } \mathbf{L}^2(Q_{T_1})\text{-де,} \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.47)$$

Шын мәнінде, (4.47) өрнекті интеграл арқылы жазсақ, онда төмендегі түрде болады

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{T_1}} [(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \, d\mathbf{x} dt = \\ & \int_{Q_{T_1}} [(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) \cdot \nabla] \mathbf{u}^n \, d\mathbf{x} dt - \int_{Q_{T_1}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} dt, \end{aligned}$$

бұл өрнекке Гелдер теңсіздігін (4.19) мен (4.44) өрнектерімен бірге қолданғанда оң жағындағы бірінші интегралдың мәні нөлге жинақтылатынын аңғаруға болады:

$$\int_{Q_{T_1}} [(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) \cdot \nabla] \mathbf{u}^n \, d\mathbf{x} dt \leq \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(Q_{T_1})} \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{L}^2(0,T_1;\mathbf{H}^1(\Omega))} \leq$$

$$\sqrt{C} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(Q_{T_1})} \longrightarrow 0, \quad \text{егер } n \rightarrow \infty.$$

Ал, (4.39) өрнектің және $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(Q_{T_1})$ әсерінен екінші интеграл нөлге барады. Аналогты түрде локалды емес мүше үшін де келесі шектік көшу орын-

∂_t

$$\int_0^{T_1} F_1(\mathbf{u}^n, t) \int_{\Omega} \mathbf{g} \varphi_k \zeta \, d\mathbf{x} dt = \int_0^{T_1} \frac{1}{g_0(t)} \left[e'(t) + \kappa (\nabla \mathbf{u}_t^n, \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} - \right. \\ \left. ((\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}^n)_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} \, ds \right] \int_{\Omega} \mathbf{g} \varphi_k \zeta \, d\mathbf{x} dt \rightharpoonup \\ \int_0^{T_1} F(\mathbf{u}, t) \int_{\Omega} \mathbf{g} \varphi_k \zeta \, d\mathbf{x} dt \text{ жинақты } L^2([0, T_1])\text{-де, } n \rightarrow \infty.$$

Соңғы өрнекте екінші мүше (4.41) өрнектің, үшінші мүше (4.39) өрнектің, бесінші мүше (4.40) өрнектің әсерінен жинақты. Сондай-ақ, бірінші мүше тривиалды түрде, ал төртінші мүше (4.47) өрнектің әсерінен жинақты. (4.46) теңдеу сызықты болғандықтан кез келген $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ функцияларының ақырлы сызықтық комбинациясы мен $\zeta \in C_0^\infty([0, T_1])$ шартын қанағаттандыратын $\varphi \zeta \in \mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{H}^1(\Omega))$ функциясы үшін де орынды болып қалады. Мұнымен қоса, (4.46) өрнектегі $[0, T_1]$ аралығындағы интеграл астындағы барлық қосылғыштар t айнымалысы бойынша үзіліссіз функция болып табылады. Демек, барлық дерлік $t \in [0, T_1]$ және $\varphi \in \mathcal{V}$ үшін келесі интегралдық теңдік алынды

$$\int_{\Omega} [\mathbf{u}_t(t) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t)] \varphi \, d\mathbf{x} + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \varphi)_{2,\Omega} + \\ \kappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \varphi)_{2,\Omega} = \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \varphi)_{2,\Omega} \, ds + \\ F_1(\mathbf{u}, t) \int_{\Omega} \mathbf{g}(t) \varphi \, d\mathbf{x}. \quad (4.48)$$

4.1-Теореманың дәлелдеуі бітті.

Бұл бөлімшеде қарастырылып отырған кері есептің әлді шешімінің бар болуы зерттелінді.

4.1.3 Кері есептің әлді шешімінің бар болуы

Теорема 4.2. Айталық, 4.1-Теореманың шарттары орындалсын. Мұнымен қоса, бастапқы функция үшін келесі шартты орынды болсын

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega). \quad (4.49)$$

Олай болса, (4.14), (4.3)-(4.4) локалды емес тура есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір әлді шешімі бар болады. Сонымен қатар, (4.1)-(4.5) кері есебінің

де кемінде бір жалпылама әлді шешімі бар болады және ол (4.19) бағалауға қоса

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0,T_1;\mathbf{H}^1\cap\mathbf{H}^2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2(0,T_1;\mathbf{H}^1\cap\mathbf{H}^2(\Omega))}^2 \leq C < \infty. \quad (4.50)$$

бағалау орынды болады, мұндағы T_1 мәні (4.35) өрнектен белгілі және C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

Дәлелдеуі 3. Жалпылама әлді шешімнің бар болуын дәлелдеу үшін арнайы базис, нақтырақ айтқанда, (4.14), (4.3)-(4.4) локалды емес тура есеп үшін

$$\tilde{\Delta}\varphi_k := -\mathbb{P}\Delta\varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad \varphi_k(x) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega) \quad (4.51)$$

түрінде Стокс операторы үшін қойылған спектралды есептің меншікті функциялары қолданылады, мұндағы $\mathbb{P} : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}(\Omega)$ Лере проекциясы. Сондай-ақ, $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ жүйесі $\mathbf{H}$ кеңістігінде ортогональ және $\mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған жүйені құрайды [66], [67].

Олай болса, әлсіз шешім үшін алынған барлық априорлық бағалаулар әлді шешімге де орынды. 4.2-теореманы толық дәлелдеу үшін $\Delta\mathbf{u}^n$ мен $\Delta\mathbf{u}_t^n$ -ға априорлық бағалаулар алсақ жеткілікті.

Сөйтіп, (4.21) өрнекті $\lambda_k \frac{dc_k^n(t)}{dt}$ -ға көбейтіп, k бойынша 1-ден n -ге шейін қосындыласақ, онда келесі өрнек шығады

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \left\| \tilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \left\| \tilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 = \\ & - \left((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}^n(t), \tilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t) \right) - \int_0^t K(t-s) \left(\tilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s), \tilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t) \right)_{2,\Omega} ds + \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$F_1(\mathbf{u}^n, t) \left(\mathbf{g}, -\tilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t) \right)_{2,\Omega} \equiv I_6,$$

мұндағы $F(\mathbf{u}^n, t)$ функциясы (4.22) өрнегімен анықталады және төмендегі бағалауды қанағаттандырады

$$\begin{aligned} |F_1|^2 \leq & \frac{5}{k_0^2} \left[|e'(t)|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \left(\varkappa^2 \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \nu^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. C^4(\Omega) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^4 + K_0^2 \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Гельдер мен Юнг теңсіздіктерін және (4.53) бағалауды бірге қолданып, I_6 -ті бағалайық

$$\begin{aligned} |I_6| \leq & \frac{\varkappa}{2} \left\| \tilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3}{2\varkappa} \left[C \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}^1(\Omega)}^2 \left\| \tilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \right. \\ & \left. K_0^2 \int_0^t \left\| \tilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds + |F_1|^2 \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

(4.54) бағалауды (4.52) теңдікке ескергенде, келесі теңсіздік қорытылады

$$\nu \frac{d}{dt} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq \frac{3}{\varkappa} \left[C \left\| \mathbf{u}^n(t) \right\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + K_0^2 \int_0^t \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds + |F_1|^2 \left\| \mathbf{g}(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \right]. \quad (4.55)$$

Енді (4.55) өрнекті s бойынша 0 –ден t –ға шейін интегралдап және әлсіз шешім үшін алынған априорлық бағалауларды қолдансақ, төмендегі интегралдық теңсіздік алынады

$$\nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \int_0^t \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds \leq C_8 + C_9 \int_0^t \nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds, \quad (4.56)$$

мұндағы

$$C_8 := \nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_0 \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3}{\varkappa} \left\| \mathbf{g} \right\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}^2 \int_0^{T_1} |F_1(s)|^2 ds < \infty,$$

$$C_9 := \frac{3}{\nu \varkappa} \left(C(\Omega) \sup_{t \in [0,T_1]} \left\| \mathbf{u}^n(t) \right\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + K_0^2 T \right) < \infty.$$

Мұнан кейін, (4.56) өрнекке Гронуолл леммасын қолданғанда,

$$\left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\nu} C_8 e^{C_9 T_1}, \quad \forall t \in (0, T_1) \quad (4.57)$$

бағалауы қорытылады. Егер (4.56) өрнектің екі жағынан $t \in [0, T_1]$ бойынша супремум алып және (4.57) бағалауды қолдансақ, онда төмендегі бағалау тұжырымдалады

$$\sup_{t \in [0,T_1]} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n \right\|_{\mathbf{L}^2(Q_{T_1})}^2 \leq C := C(\nu, \varkappa, C_8, C_9, T_1) < \infty. \quad (4.58)$$

4.1.4 Шешімнің жалғыздығы

Теорема 4.3. Айталық, 4.1-Теореманың шарттары орындалсын. Сонымен қатар, $\mathbf{u}_1$ мен $\mathbf{u}_2$ функциялары (4.1)-(4.4), (4.13) есебінің бірдей берілгендері үшін $\mathbf{u}_1$ мен $\mathbf{u}_2$ әлсіз (әлді) шешімі болсын. Онда барлық $(x, t) \in Q_{T^*}$ үшін (4.1)-(4.4), (4.13) есебінің әлсіз (әлді) шешім жалғыз болады, яғни $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$, мұндағы T^* – әлсіз (әлді) шешімнің бар болуының максималды уақыты.

Дәлелдеуі 4. $\mathbf{u}_2$ және $\mathbf{u}_1$ үшін (4.14) теңдеуді жазып және оларды бір-бірін азайтып, шыққан нәтижені сәйкесінше $\mathbf{u} := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ және $\mathbf{u}_t$ функцияларына $\mathbf{L}_2(\Omega)$ кеңістігінде скаляр көбейткенде, сәйкес келесі өрнектер

алынады

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 = \\
& - ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} ds + \\
& \frac{1}{g_0(t)} \left[\varkappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}_1(t))_{2,\Omega} + \right. \\
& \left. ((\mathbf{u}_2(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}(t)) + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right] (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}(t))_{2,\Omega}, \tag{4.59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 = \\
& - ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_t(t))_{2,\Omega} - ((\mathbf{u}_2(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t), \mathbf{u}_t(t))_{2,\Omega} - \\
& \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega} ds + \frac{1}{g_0(t)} \left[\varkappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \right. \\
& \left. \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}_1(t)) + \right. \\
& \left. ((\mathbf{u}_2(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}(t)) + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right] (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}_t(t))_{2,\Omega} \tag{4.60}
\end{aligned}$$

Соңғы алынған теңдіктерді қоссақ, онда төмендегі нәтиже шығады

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \kappa) \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \\
& \|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}^2 + \kappa \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 = -((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} + \\
& ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_t(t))_{2,\Omega} + ((\mathbf{u}_2(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t), \mathbf{u}_t(t))_{2,\Omega} - \\
& \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} ds + \frac{1}{g_0(t)} \left[\kappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \right. \\
& \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}_1(t))_{2,\Omega} + ((\mathbf{u}_2(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}(t)) + \\
& \left. \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right] (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} + \\
& \int_0^t K(t-s) \nabla \mathbf{u}^n(s) \nabla \mathbf{u}_t^n(t) ds - \frac{1}{g_0(t)} \left[\kappa (\nabla \mathbf{u}_t, \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \right. \\
& \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}_1(t)) + ((\mathbf{u}_2(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}(t)) + \\
& \left. \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right] (\mathbf{g}, \mathbf{u}_t(t))_{2,\Omega} = \sum_{i=1}^7 R_i.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Гельдер мен Юнг теңсіздіктерінің көмегімен (4.59) өрнектің оң жағындағы қосылғыштарды бағалайық

$$\begin{aligned}
|R_1| &= \left| -((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} \right| \leq \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}(t)\|_{4,\Omega}^2 \leq \\
& C(\Omega) \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
|R_2| &\leq \|\mathbf{u}(t)\|_{4,\Omega} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{4,\Omega} \leq \\
& \frac{\varepsilon_0}{8} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \frac{2C^2}{\varepsilon_0} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
|R_3| &\leq \|\mathbf{u}_2(t)\|_{4,\Omega} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{4,\Omega} \leq \\
& \frac{\varepsilon_0}{8} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \frac{2C^2}{\varepsilon_0} \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
|R_4| &\leq \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \frac{K_0^2}{2\nu} \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds,
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
|R_5| &\leq \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}}{k_0} \|\omega\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \left[\varkappa \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \right. \\
&\quad \left. \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \right. \\
&\quad \left. K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2}{2k_0^2} \|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2 + \\
&\quad \frac{\|\omega\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2}{2} \left[\nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \right. \\
&\quad \left. \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + K_0^2 \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds \right] + \\
&\quad \frac{\varepsilon_0}{8} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \frac{2\varkappa^2}{\varepsilon_0 k_0^2} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2
\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}
|R_6| &\leq \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\quad \frac{\varepsilon_0}{8} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_0} \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds,
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
|R_7| &\leq \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}}{k_0} \|\omega\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \left[\varkappa \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \right. \\
&\quad \left. \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \right. \\
&\quad \left. K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \frac{\varepsilon_1}{4} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2}{\varepsilon_1 k_0^2} \cdot \\
&\quad \left[\nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \right. \\
&\quad \left. K_0^2 \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds \right] + \frac{\varepsilon_1}{4} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}^2 + \\
&\quad \frac{\varkappa^2 \|\omega\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2}{\varepsilon_1 k_0^2} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Алынган (4.62)-(4.68) бағалауларды (4.61) өрнекке қойғанда, келесі диффе-

ренициалдық теңсіздік алынады

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\varkappa + \nu) \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \alpha \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \\ & \beta \|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}^2 \leq a_1 \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + a_2 \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds + a_3 \|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2, \end{aligned} \quad (4.69)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} \alpha &:= 2 \left(\varkappa - \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{\varkappa^2}{\varepsilon_1 k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right), \quad \beta := 2 \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{2} \right); \\ a_1 &:= 2C \sup_{t \in [0, T^*]} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{2,\Omega} + \frac{4C^2}{\varepsilon_0} \sup_{t \in [0, T^*]} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{4C^2}{\varepsilon_0} \sup_{t \in [0, T^*]} \|\mathbf{u}_2(t)\|_{2,\Omega}^2 + \\ &+ \left(\frac{2 \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2}{\varepsilon_1 k_0^2} + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right) \times \\ &\left(\nu^2 + \sup_{t \in [0, T^*]} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{2,\Omega}^2 + \sup_{t \in [0, T^*]} \|\mathbf{u}_2(t)\|_{2,\Omega}^2 \right); \\ a_2 &:= \frac{K_0^2}{\nu} + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 K_0^2 + \frac{2 \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2}{\varepsilon_1 k_0^2} K_0^2 + \frac{4K_0^2}{\varepsilon_0}; \\ a_3 &:= \frac{1}{k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \left(1 + \frac{4\varkappa^2}{\varepsilon_0} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Енді $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$, функциялары және әлсіз шешім үшін алынған бағалауларда $\frac{\varkappa}{k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq m < 2$ шарты кезіндегі ε_i , $i = 0, 1$ сәйкес мәнінде $\alpha, \beta, a_1, a_2, a_3$ коэффициенттері оң және ақырлы болып табылады. Олай болса, (4.69) өрнекті τ бойынша 0 -ден $t \in [0, T^*]$ -ға шейін интегралдасақ, онда келесі теңсіздік қорытылады

$$y(t) \leq a \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad (4.70)$$

мұндағы

$$y(t) := \|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\varkappa + \nu) \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2, \quad a := \max \left\{ \frac{1}{\varkappa + \nu} (a_1 + T a_2), a_3 \right\}.$$

4.3-теореманың шарты мен Гронуолл леммасы бойынша (4.70) өрнектен $t \in [0, T^*]$ үшін $y(t) \equiv 0$ тұжырымдалады, яғни $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$.